Andalucía 2021. Problema 1.

(a) [6 puntos] Se lanzan n monedas una detrás de otra. En cada lanzamiento, la probabilidad de obtener cara es p. Si se han obtenido k caras, $0 \leq k \leq n$. ¿cuál es la probabilidad de que haya aparecido cara en la primera moneda?

(b) [4 puntos] Demuestre que todo número complejo z de módulo 1 con $z \neq 1$ puede expresarse de la forma

$$\frac{1+\mu i}{1-\mu i}, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

Halle μ en función del argumento de z.

Solución:

(a) Designemos con C_i al suceso "obtener cara en la moneda lanzada en el lugar i-ésimo", del enunciado se tiene: $P(C_i) = p;\ \forall i \in \{1,2, \dots, n\}$.

Sea X la variable aleatoria "número de caras que aparecen al lanzar sucesivamente las n monedas", que sigue una distribución binomial *B(n,p)*, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ 0 \leq k \leq n$

La probabilidad pedida es: $P(C_1|\ X = k)$ por el teorema de Bayes, o directamente a partir de la probabilidad de la intersección de sucesos $P[C_1 \cap (X = k)]$, se tiene que:

$$P(C_1|\ X = k) = \frac{P(C_1).P(X = k|C_1)}{P(X = k)}$$

La probabilidad $P(X = k|C_1)$ es la probabilidad de obtener k-1 caras en n-1 extracciones siguientes:

$$P(X = k|C_1) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)} = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

De donde: $$P(C_1|\ X = k) = \frac{p\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k}{n}$$

(a) Para z=-1 se tiene que $\forall \mu \in \mathbb{R},\ 1 - \mu i \neq 0 \implies \frac{1+\mu i}{1-\mu i} = -1 \Rightarrow 1 + \mu i = -1 + \mu i \Rightarrow 2 = 0$ lo que es imposible.

Tomando: $\mu = 0 \implies \frac{1+\mu i}{1-\mu i} = 1$

Creo que hay un error en el enunciado y debe decir con $z \neq -1$. Consideremos ahora de esa manera.

Sea α el argumento de z, y como $|z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\alpha}$, de donde: $\frac{1+\mu i}{1-\mu i} = e^{\alpha i}$, operando

$\Rightarrow 1 + \mu i = (1 - \mu i)e^{i\alpha} \Rightarrow \mu i\left(1 + e^{i\alpha}\right) = e^{i\alpha} - 1 \Rightarrow \mu = \frac{e^{i\alpha}-1}{(1+e^{i\alpha})i} = \frac{(1-e^{i\alpha})i}{1+e^{i\alpha}}$

Sustituyendo, ahora, $e^{i\alpha} = cos\alpha + isen\alpha$, se tiene:

$$\mu = \frac{(1 - cos\alpha - isen\alpha)i}{1 + cos\alpha + isen\alpha} = \frac{\left((1 - cos\alpha)i + sen\alpha\right)(1 + cos\alpha - isen\alpha)}{(1 + cos\alpha + isen\alpha)(1 + cos\alpha - isen\alpha)} \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{(1 - cos^2\alpha)i + (1 - cos\alpha)sen\alpha + sen\alpha(1 + cos\alpha) - isen^2\alpha}{(1 + cos\alpha)^2 + sen^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{isen^2\alpha + 2sen\alpha - isen^2\alpha}{1 + 2cos\alpha + cos^2\alpha + sen^2\alpha} = \frac{2sen\alpha}{2 + 2cos\alpha} = \frac{sen\alpha}{1 + cos\alpha}$$

La expresión $\mu = \frac{sen\alpha}{1+cos\alpha} \in \mathbb{R}$, tiene sentido si $\alpha \neq (2k+1)\pi$,$\forall k \in \mathbb{Z}$, es decir si $z \neq -1$
μ también se puede expresar como:

$$\mu = \frac{sen\alpha}{1+cos\alpha} = \frac{2sen\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}{2cos^2\frac{\alpha}{2}} = tag\,\frac{\alpha}{2}, \qquad \alpha = 2\,arctg\mu$$

Andalucía 2021 . Problema 2.

(a) [6 puntos] Estudie los extremos de la función

$$f(x) = |2x-1|e^{-|x-2|} \quad en\ [-3,3]$$

(b) Calcule el límite de la sucesión definida por

$$\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-cos\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)$$

Solución:

(a) Como la función es continua (es el producto de funciones continuas) en [-3,3], por el teorema de Weierstrass la función alcanza en él los extremos absolutos.
Se trata de encontrar los valores de la función en: los puntos angulosos (puntos donde la función no es derivable), los puntos críticos (puntos donde se anula la derivada) y los puntos extremos del intervalo.
Quitando el valor absoluto, la función se puede definir a trozos como:

$$f(x)=\begin{cases}(1-2x)e^{x-2} & si \quad -3\le x\le 1/2\\ (2x-1)e^{x-2} & si \quad \dfrac{1}{2}<x\le 2\\ (2x-1)e^{2-x} & si \quad 2<x\le 3\end{cases}$$

La función derivada está definida por:

$$f'(x)=\begin{cases}-(1+2x)e^{x-2} & si \quad -3< x< 1/2\\ (2x+1)e^{x-2} & si \quad \dfrac{1}{2}<x< 2\\ (3-2x)e^{2-x} & si \quad 2<x< 3\end{cases}$$

La función derivada se anula solo para: $x=-\frac{1}{2}\in\left(-3,\ \frac{1}{2}\right)$

En x=1/2 y en x=2 las derivadas laterales son diferentes, puntos angulosos, y en x=-3 y en x=3 la función derivada solo está definida lateralmente.

$$\begin{cases}
si & x=-3 & f'(-3^+)=5e^{-5} & & punto\ inicial\\
si & -3<x<-1/2 & f'(x)>0 & \Rightarrow & f\ es\ creciente\\
si & x=-1/2 & f'(x)=0 & \Rightarrow & f\ tiene\ un\ màximo\ local\\
si & -\dfrac{1}{2}<x<1/2 & f'(x)<0 & \Rightarrow & f\ es\ decreciente\\
si & x=1/2 & \begin{cases}f'\left(\left(\frac{1}{2}\right)^-\right)=-2e^{-3/2}\\ f'\left(\left(\frac{1}{2}\right)^+\right)=2e^{-3/2}\end{cases} & \Rightarrow & \begin{cases}f\ tiene\ un\ punto\ anguloso\\ f\ tiene\ un\ mínimo\ local\end{cases}\\
si & \dfrac{1}{2}<x<2 & f'(x)>0 & \Rightarrow & f\ es\ creciente\\
si & x=2 & \begin{cases}f'(2^-)=5\\ f'^{(2^+)}=-1\end{cases} & \Rightarrow & \begin{cases}f\ tiene\ un\ punto\ anguloso\\ f\ tiene\ un\ máximo\ local\end{cases}\\
si & 2<x<3 & f'(x)<0 & \Rightarrow & f\ es\ decreciente\\
si & x=3 & f'(3^-)=-3e^{-1} & & punto\ final
\end{cases}$$

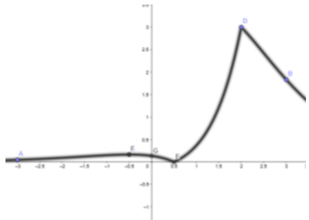
Para los puntos citados al principio calculamos los valores de la función:

$$f(-3)=7e^{-5}\ ,\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=2e^{-\frac{5}{2}}\ ,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=0\ ,\ f(2)=3,\ f(3)=5e^{-1}$$

Por lo que el mínimo absoluto se encuentra en $x = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Y el máximo absoluto en $x = 2$, $f(2) = 3$

En $x = -\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{5}{2}}$, es un máximo local.



La gráfica es aproximadamente:

(b) Nos piden el valor del: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - cos\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(1-cos\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)}{\ln n}$

Teniendo en cuenta el criterio de Stolz para el cociente de dos sucesiones:

Si las sucesiones $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *verifican una de las dos condiciones siguientes:*

i) $\{b_n\}$ *es monótona creciente con* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

ii) $\{b_n\}$ *es monótona decreciente con* $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, *finito o infinito, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

Considero las sucesiones $\{a_n\} = \left\{\sum_{k=1}^{n}\left(1 - cos\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)\right\}$ y $\{b_n\} = \{\ln(n)\}$

Como la sucesión $\{\ln(n)\}$ es monótona creciente, la función *ln(x)* es estrictamente creciente, para x>0, y $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n) = +\infty$, aplicando el criterio de Stolz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1}\left(1 - cos\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(1 - cos\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)}{\ln(n+1) - \ln(n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - cos\frac{\pi}{\sqrt{n+1}}}{\ln(n+1) - \ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2sen^2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n+1}}\right)}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n+1}}\right)^2}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\frac{\pi^2}{4(n+1)}}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi^2}{2}}{(n+1).\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \frac{\pi^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{\ln\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\right]} = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{\ln\ e} = \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - cos\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

Andalucía 2021. Problema 3.

(a) [5 puntos] Pruebe que $\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{1}{2} + \frac{sen\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2sen\frac{\theta}{2}}$

(b) [5 puntos] Dado el triángulo ABC, pruebe que es rectángulo si y solo si se cumple que $sen^2 A + sen^2 B + sen^2 C = 2$

Solución:

(a) Considero la serie geométrica $\sum_{k=o}^{n} e^{k\theta i}$

Por un lado, $S = \sum_{k=o}^{n} e^{k\theta i} = \sum_{k=o}^{n} (\cos k\theta + isenk\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta + i\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen} k\theta$

Por otro lado, teniendo en cuenta la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica, $S = \frac{a_n r - a_1}{r-1}$

$$S = \sum_{k=o}^{n} e^{k\theta i} = \frac{e^{n\theta i}e^{\theta i} - 1}{e^{\theta i} - 1} = \frac{e^{(n+1)\theta i} - 1}{e^{\theta i} - 1} = \frac{\cos(n+1)\,\theta + isen(n+1)\theta - 1}{\cos\theta + isen\theta - 1}$$

Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador se tiene:

$$S = \sum_{k=o}^{n} e^{k\theta i} = \frac{[\cos(n+1)\,\theta - 1 + isen(n+1)\theta](\cos\theta - 1 - isen\theta)}{(\cos\theta - 1 + isen\theta)(\cos\theta - 1 - isen\theta)}$$

Como: $(\cos\theta - 1 + isen\theta)(\cos\theta - 1 - isen\theta) = \cos^2\theta - 2cos\theta + 1 + sen^2\theta = 2(1 - cos\theta) = 4sen^2\frac{\theta}{2}$

$$[\cos(n+1)\,\theta - 1 + isen(n+1)\theta](\cos\theta - 1 - isen\theta) =$$

$$= [\cos(n+1)\,\theta - 1](\cos\theta - 1) - [\cos(n+1)\,\theta - 1]isen\theta + isen(n+1)\theta(\cos\theta - 1) - i^2 sen(n+1)\theta sen\theta =$$

$$= \cos(n+1)\,\theta\cos\theta - \cos(n+1)\,\theta - cos\theta + 1 + sen(n+1)\theta sen\theta$$
$$+\, i\left[-\cos(n+1)\,\theta sen\theta + sen\theta + sen(n+1)\theta cos\theta - sen(n+1)\theta\right] =$$

$$= \cos(n+1-1)\,\theta - \cos(n+1)\,\theta - cos\theta + 1 + i[sen(n+1-1)\theta - sen(n+1)\theta - cos\theta] =$$

$$= \cos n\,\theta - \cos(n+1)\,\theta - cos\theta + 1 + i[senn\theta - sen(n+1)\theta - cos\theta]$$

$$S = \frac{\cos n\,\theta - \cos(n+1)\,\theta - cos\theta + 1 + i[sen(n\theta) - sen(n+1)\theta - cos\theta]}{4sen^2\frac{\theta}{2}}$$

Igualando las partes imaginarias y las partes reales de ambas expresiones se tiene:

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen} k\theta = \frac{sen(n\theta) - sen(n+1)\theta - cos\theta}{4sen^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{\cos n\,\theta - \cos(n+1)\,\theta - cos\theta + 1}{4sen^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1 - cos\theta}{4sen^2\frac{\theta}{2}} - \frac{\cos(n+1)\,\theta - \cos n\,\theta}{4sen^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2sen^2\frac{\theta}{2}}{4sen^2\frac{\theta}{2}} - \frac{-2\,sen\,\frac{n+1+n}{2}\theta\;sen\frac{n+1-n}{2}\theta}{4sen^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{2sen\frac{2n+1}{2}\theta\;sen\frac{\theta}{2}}{4sen^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{sen\,\frac{2n+1}{2}\theta}{2sen\frac{\theta}{2}}$$

Y hemos obtenido que: $\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{1}{2} + \frac{sen\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2sen\frac{\theta}{2}}$ c.q.d.

(b) Condición necesaria: si el triángulo es rectángulo uno de los ángulos es recto y los otros dos complementarios. Pongamos por ejemplo que A es recto como los ángulos B y C son complementarios se tiene que: $senC = cosB$ de donde:

$$sen^2A + sen^2B + sen^2C = 1 + sen^2B + cos^2B = 1 + 1 = 2$$

Condición suficiente: Aplicando el teorema de los senos: $\frac{a}{senA} = \frac{b}{senC} = \frac{c}{senC} = 2R$

Siendo R el radio de la circunferencia circunscrita, elevando al cuadrado

$$\frac{a^2}{sen^2A} = \frac{b^2}{sen^2B} = \frac{c^2}{sen^2C} = 4R^2$$

Si en una proporción (igualdad de fracciones) se suman los antecedentes (numeradores) y los consecuentes (denominadores) se obtiene otro término de la proporción (igualdad) se tiene que

$$4R^2 = \frac{a^2}{sen^2A} = \frac{b^2}{sen^2B} = \frac{c^2}{sen^2C} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{sen^2A + sen^2B + sen^2C}$$

$$4R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{sen^2A + sen^2B + sen^2C}$$

Si $sen^2A + sen^2B + sen^2C = 2$, entonces

$$4R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \implies 8R^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Que es una condición suficiente, y también necesaria, para que el triángulo sea rectángulo.

Nota: El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo se obtiene mediante la fórmula:

$R = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{8(1+cosAcosBcosC)}} \implies 8(1 + cosAcosBcosC)R^2 = a^2 + b^2 + c^2$ de donde:

Si el triángulo es acutángulo, los tres ángulos son agudos:

$$cosAcosBcosC > 0 \Rightarrow 8R^2 < a^2 + b^2 + c^2$$

Si el triángulo es obtusángulo, uno de los ángulos es obtuso:

$$cosAcosBcosC < 0 \Rightarrow 8R^2 > a^2 + b^2 + c^2$$

Si el triángulo es rectángulo, uno de los ángulos es recto:

$$cosAcosBcosC = 0 \Rightarrow 8R^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Andalucía 2021. Problema 4.

(a) [2.5 puntos] Sea V un espacio vectorial sobres un cuerpo $\mathbb{K}$. Pruebe que si un vector $\boldsymbol{v}$ depende linealmente de $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}\}$ pero no depende linealmente de $\{\boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}\}$entonces $\boldsymbol{u_1}$ depende linealmente de $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}\}$**.**

(b) En el espacio vectorial $\mathbb{Q}^4$ se consideran los subespacios

$$S_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle \qquad S_2: \begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \qquad S_3: \{y+z=0$$

(b.1) [3.5 puntos] Halle $\dim(S_1+S_2)$ y $\dim(S_1 \cap S_2)$

(b.2) [2.5 puntos] Halle una base de $S_1 \cap S_3$

(b.3) [1.5 puntos] ¿Qué dimensión tiene S_1+S_3?

Solución:

(a) Un vector es linealmente dependiente de otros si se puede poner en combinación lineal de esos otros.

Como, por hipótesis el vector $\boldsymbol{v}$ depende linealmente de $\{u_1, u_2, u_3\} \Longrightarrow \exists x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K}$ tales que $v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$, y además si $x_1 = 0$ entonces $v = x_2u_2 + x_3u_3$, por lo que v dependería linealmente de $\{u_2, u_3\}$**,** en contra de la hipótesis del enunciado por lo que $x_1 \neq 0$. Dividiendo por $x_1 \neq 0$ y despejando u_1 se tiene que

$$\frac{1}{x_1}v = u_1 + \frac{x_2}{x_1}u_2 + \frac{x_3}{x_1}u_3 \Longrightarrow \qquad u_1 = \frac{1}{x_1}v - \frac{x_2}{x_1}u_2 - \frac{x_3}{x_1}u_3$$

Lo que quiere decir que u_1 depende linealmente de $\{v, u_2, u_3\}$ c.q.d.

(b) Estudiemos primero $S_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

El sistema de generadores que define a S_1 está formado por tres vectores linealmente dependientes:

$\begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ (también puede verse escalonando por columnas)(*)

y los vectores $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ son linealmente independientes por lo que forman una base de S_1

$$Base(S_1) = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \right\} \quad \text{y por tanto } \dim(S_1) = 2.$$

Unas ecuaciones vectoriales de S_1 vienen dadas por $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{Q}$

Unas ecuaciones paramétricas de S_1 vienen dadas por $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = 0 \end{cases}$ eliminando los parámetros se obtienen unas ecuaciones cartesianas $S_1 : \begin{cases} x = y - z \\ t = 0 \end{cases}$ $\quad S_1 : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$

Estudiemos $S_2 : \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ las ecuaciones cartesianas que definen a S_2 son linealmente independientes.

Teniendo en cuenta que: la dimensión de un subespacio es igual a la dimensión del espacio, a que pertenece, menos el número de ecuaciones cartesianas, linealmente independientes, que lo definen.

$$\dim(S_2) = \dim(\mathbb{Q}^4) - 2 = 4 - 2 = 2.$$

Resolviendo el sistema se obtienen las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases}$ y una base de S_2 se obtiene dando (α, β) dos parejas de valores linealmente independientes, por ejemplo: (1,0) y (0,1).

$$Base\ (S_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b.1) Tendré en cuenta que: $\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$

O bien calculo $\dim\ (S_1 + S_2)$.

Un sistema de generadores de $S_1 + S_2$ se obtiene uniendo las bases de cada uno de los subespacios sumandos:

$$S_1 + S_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Calculo el determinante formado por las componentes de estos vectores:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ por lo que los vectores son l. independientes y constituyen una base de $S_1 + S_2 \Longrightarrow \dim(S_1 + S_2) = 4,$ y por tanto: $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$

O bien calculo $\dim\ (S_1 \cap S_2)$. Un sistema de ecuaciones cartesianas de $S_1 \cap S_2$ se obtiene juntando las ecuaciones cartesianas de cada uno de los subespacios, $S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ t = 0 \\ x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ resolviendo queda: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$

Es decir $S_1 \cap S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y por tanto $\dim(S_1 \cap S_2) = 0 \Longrightarrow \dim(S_1 + S_2) = 4$

(b.2) Para hallar una base de $S_1 \cap S_3$ escribo unas de sus ecuaciones cartesianas juntando las ecuaciones de cada uno de los subespacios: $S_1 \cap S_3 : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

Resolviendo queda: $\begin{cases} x = 2\gamma \\ y = \gamma \\ z = -\gamma \\ t = 0 \end{cases}$ por lo que $\dim(S_1 \cap S_3) = 1$ y una base de $S_1 \cap S_3$ es:

$$Base(S_1 \cap S_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(b.3) Como:

$$\dim(S_1) = 2, \quad \dim(S_3) = \dim(\mathbb{Q}^4) - 1 = 3, \quad \dim(S_1 \cap S_3) = 1$$

$$\dim(S_1 + S_3) = \dim(S_1) + \dim(S_3) - \dim(S_1 \cap S_3) = 2 + 3 - 1 = 4$$

(*)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\to}_{c3-3c1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\to}_{c3+2c2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto hay dos vectores, columnas, independientes.

Andalucía 2021. Problema 5

(a) [5 puntos] Halle el volumen del toro de revolución que se obtiene al girar la circunferencia $(x-a)^2+y^2=b^2, (0<b<a)$ alrededor del eje de ordenadas.

(b) Siendo $a_n=\frac{n^k}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ el término general de una serie, se pide:

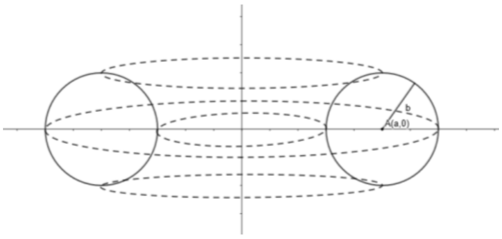
(b.1) [3 puntos] Sustituya el exponente k por el mayor número entero compatible con la condición de ser convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

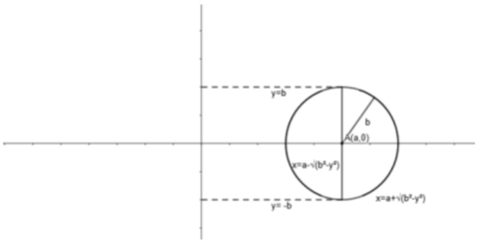
(b.2) [2 puntos] Halle la suma de la serie par dicha k.

Solución:

(a) El volumen del cuerpo engendrado al girar 360° alrededor del eje OY la parte del plano comprendida entre las curvas $x=f(y)$ e $x=g(y)$, y las rectas $y=a$ y $y=b$, siendo $f(y)\geq g(y)$ $\forall y\in[a,b]$, viene dado por:

$$V=\pi\int_a^b\left((f(y))^2-(g(y))^2\right)dx, \text{ integración por discos}$$





Despejando x en la ecuación $(x-a)^2+y^2=b^2, (0<b<a)$ se tiene $x=a\pm\sqrt{b^2-y^2}$

El volumen del toro vendrá dado por: $V=\pi\int_{-b}^{b}\left[\left(a+\sqrt{b^2-y^2}\right)^2-\left(a-\sqrt{b^2-y^2}\right)^2\right]dy$

Teniendo en cuenta la simetría del círculo $(x-a)^2+y^2\leq b^2$ respecto del eje de abscisas, desarrollando el integrando y simplificando se tiene:

$$V=2\pi\int_0^b 4a\sqrt{b^2-y^2}dy=8\pi a\int_0^b\sqrt{b^2-y^2}dy$$

Efectuando el cambio de variable $\left\{\begin{matrix} y=bsent \\ dy=bcost \\ y=0\rightarrow t=0 \\ y=b\rightarrow t=\pi/2 \end{matrix}\right\}$ se obtiene que:

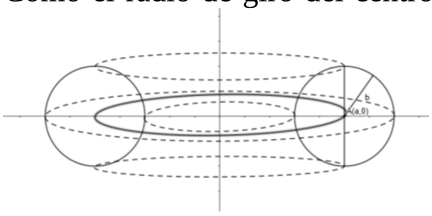
$$V=8\pi a\int_0^{\pi/2}\sqrt{b^2-b^2sen^2t}\ \ bcost\ dt=\ 8\pi a\int_0^{\pi/2}bcost\ \ bcost\ dt=8\pi ab^2\int_0^{\pi/2}cos^2t\ \ \ dt$$

$$V=8\pi ab^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\ \ dt=4\pi ab^2\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=\ 4\pi ab^2\left[t+\frac{sen\ 2t}{2}\right]_0^{\pi/2}$$
$$=4\pi ab^2\frac{\pi}{2}$$

De donde: $V=2\pi^2ab^2$.

De otra manera, aplicando el teorema de Pappus/Guldin para el volumen que dice: El volumen, *V*, de un sólido de revolución generado mediante la rotación de un área plana alrededor de un eje externo, es igual al producto del área, *A*, por la distancia, $2\pi r$, recorrida por su centroide en una rotación completa alrededor del eje. $V=2\pi rA$

Como el radio de giro del centro del círculo es $r=a$ y el área del circulo es $A = \pi b^2$, se tiene que:



$$V = (2\pi a)(\pi b^2) = 2\pi^2 ab^2.$$

(b) (b.1) Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n = \frac{n^k}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, para que sea convergente es necesario que $\lim a_n = 0 \Rightarrow k < 3$

Además, por el criterio de comparación, esta serie tiene el mismo carácter que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-k}}$ que es convergente cuando $3 - k > 1 \Rightarrow k < 2$ y como $k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \leq 1$ y por tanto el mayor valor posible del exponente k compatible con la condición de ser convergente es $k=1$.

(b.2) Descompongamos $a_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ es suma de fracciones simples:

$a_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3}$,

$A(n+2)(n+3) + B(n+1)(n+3) + C(n+1)(n+2) = n$, dando valores:

$$\begin{cases} n = -1 & 2A = -1 & A = -1/2 \\ n = -2 & -B = -2 & B = 2 \\ n = -3 & 2C = -3 & C = -3/2 \end{cases} \Rightarrow a_n = \frac{-1/2}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \frac{-3/2}{n+3} =$$

Dando valores se tiene:

$$\begin{cases} a_1 & = & -\frac{1/2}{2} & +\frac{2}{3} & -\frac{3/2}{4} \\ a_2 & = & -\frac{1/2}{3} & +\frac{2}{4} & -\frac{3/2}{5} \\ a_3 & = & -\frac{1/2}{4} & +\frac{2}{5} & -\frac{3/2}{6} \\ a_4 & = & -\frac{1/2}{5} & +\frac{2}{6} & -\frac{3/2}{7} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-3} & = & -\frac{1/2}{n-2} & +\frac{2}{n-1} & -\frac{3/2}{n} \\ a_{n-2} & = & -\frac{1/2}{n-1} & +\frac{2}{n} & -\frac{3/2}{n+1} \\ a_{n-1} & = & -\frac{1/2}{n} & +\frac{2}{n+1} & -\frac{3/2}{n+2} \\ a_n & = & -\frac{1/2}{n+1} & +\frac{2}{n+2} & -\frac{3/2}{n+3} \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro, y teniendo en cuenta que:
$\forall k, 3 \leq k \leq n$, el término tercero de a_{k-2}, $\frac{-3/2}{k+1}$, , más el segundo de a_{k-1}, $\frac{2}{k+1}$, y más el primero de a_k, $\frac{-1/2}{k+1}$, se anulan, se obtiene que:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{-1/2}{2} + \frac{2}{3} + \frac{-1/2}{3} - \frac{3/2}{n+2} + \frac{2}{n+2} - \frac{3/2}{n+3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}$

Y tomando límites se obtiene finalmente:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{3}{2(n+3)}\right] = \frac{1}{4}$$

Andalucía 2021. Problema 6

(a) [6 puntos] Sea $\Upsilon = \{x \in \mathbb{Z} : \ x \ es \ múltiplo \ de \ 20210\}$.
Pruebe que si $(\alpha + \sqrt{85}\beta) \in \Upsilon$ y $(\sqrt{85}\alpha - \beta) \in \Upsilon$ entonces $\alpha^2 + \beta^2 \in \Upsilon$

(b) Se colocan al azar cuatro bolas en tres urnas.
(b.1) [3 puntos] Describa la distribución de la variable aleatoria
X= número máximo de bolas que hay en alguna urna.
(b.2) [1 punto] Halle E(X)

Solución:

(a) Si $(\alpha + \sqrt{85}\beta) \in \Upsilon \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha + \sqrt{85}\beta = 20210m$
Si $(\sqrt{85}\alpha - \beta) \in \Upsilon \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $\sqrt{85}\alpha - \beta = 20210n$

Elevando al cuadrado las dos igualdades se tiene:

$\left\{\begin{matrix} (\alpha + \sqrt{85}\beta)^2 = (20210m)^2 \\ (\sqrt{85}\alpha - \beta)^2 = (20210n)^2 \end{matrix}\right\}$ desarrollando los primeros términos:

$\left\{\begin{matrix} \alpha^2 + 2\alpha\beta\sqrt{85} + 85\beta^2 = 20210^2 m^2 \\ 85\alpha^2 - 2\alpha\beta\sqrt{85} + \beta^2 = 20210^2 n^2 \end{matrix}\right\}$ sumando miembro a miembro ambas igualdades:

$86\alpha^2 + 86\beta^2 = 20210^2(m^2 + n^2)$, teniendo en cuenta que: 20210 = 2.5.43.47=5.86.47,

$86(\alpha^2 + \beta^2) = (5.86.47)^2(m^2 + n^2)$ y dividiendo por 86 en ambos miembros se obtiene que:

$\alpha^2 + \beta^2 = 5.47.20210(m^2 + n^2)$, con $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ es decir $\alpha^2 + \beta^2$ es múltiplo de 20210 y por tanto:

$$\alpha^2 + \beta^2 \in \Upsilon, \text{ c.q.d.}$$

(b) Designo con A, B y C a las urnas. Cada una de las cuatro bolas tiene 3 maneras de colocarse (3 urnas) en total habrá: $VR_{3,4} = 3^4 = 81$ maneras de colocar las bolas (supuestas distinguibles bien por el orden que se toman o de otra manera, lo que facilita el cálculo de la distribución de la variable X)

Designo con: $VR_{m,n}$ al número de variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n.
Con $C_{m,n} = \binom{m}{n}$ al número de combinaciones ordinarias de m elementos tomados de n en n.
Con, $V_{m,n}$ al número de variaciones ordinarias de m elementos tomados de n en n.
Y con $P_n = V_{n,n}$ al número de permutaciones ordinarias de n elementos.

Y designo, por ejemplo, con BACB al caso en que la primera y cuarta bola se hayan colado en la urna B, segunda en la urna A y la tercera en la urna C,

Y puesto que hay una urna menos que bolas, la variable X tomará uno de los valores {2,3,4}

$P(X = 4) = \frac{\binom{3}{1}}{81} = \frac{3}{81} = \frac{1}{27}$,

De las tres urnas elijo una para introducir las cuatro bolas, hay 3 casos de que las cuatro bolas caigan en la misma urna:{AAAA, BBBB, CCCC}

$P(X=3)=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{3}\binom{2}{1}}{81}=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}$,
De las tres urnas elijo una para introducir las tres bolas, $C_{3,1}$, de las cuatro bolas elijo las tres que voy a introducir, $C_{4,3}$ y de las dos urnas restantes elijo la urna donde introduzco la bola restante, $C_{2,1}$.
Ejemplo escojo urna B, las bolas primera, tercera y cuarta, y escojo urna C (la bola será la segunda, no hay elección) BCBB
$P(X=2)=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}P_2}{81}+\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{81}=\frac{54}{81}=\frac{18}{27}$,
En este caso distingo dos sucesos incompatibles, que haya una sola urna con dos bolas, y en las otras una bola cada una o bien que haya dos urnas con dos bolas y la otra vacía.
Primero: De las tres urnas elijo una para introducir dos bolas, $C_{3,1}$, de las cuatro bolas elijo las que voy a introducir en esa urna, $C_{4,2}$, por último tengo dos casos de como colocar las dos bolas en las dos urnas, una en cada una, P_2.
Segundo de las tres urnas escojo dos, $C_{3,2}$, para introducir dos bolas en cada una y después elijo de las cuatro bolas las dos que sitúo en la primera de las elegidas, lo demás ya no hay elección.
Ejemplo: Urna C, bolas segunda y cuarta; bola primera en B, (bola tercera en A, sin elección) BCAC. O bien dos urnas con dos bolas A y B, bolas segunda y tercera para A, (bolas primera y cuarta para B) BAAB

(b,1) La distribución de la v.a. X viene dada por la tabla:

x_i	$P(X=x_i)$
2	2/3
3	8/27
4	1/27
Σ	1

(b.2) La esperanza, media, de la v.a. X es $E(X)=\frac{66}{27}=\frac{22}{9}$

x_i	$p_i=P(X=x_i)$	$p_i x_i$
2	18/27	36/27
3	8/27	24/27
4	1/27	4/27
Σ	1	66/27