1. - Se dan las rectas

r_1: $x + y - 2 = 0$.

r_2: $x + 2y - 3 = 0$

r_3: $3x + y - 4 = 0$

Hallar los vértices A, B y C de un triángulo sabiendo que el radio de la circunferencia circunscrita es 2 y que r_1 es la mediatriz de AB , r_2 e s la mediatriz de BC, y r_3 la de CA ¿Cuántas soluciones hay? Hallarlas todas.

SOLUCIÓN:

Como: r_1: $x + y - 2 = 0$, es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, el vector (1,1) es un vector de dirección de la recta AB. Si llamamos a las coordenadas de A(x,y), se tienen para las de B(x+t,y+t).

Similarmente el vector (3,1) es de dirección de la recta $\overline{AC}$, de donde C(x+3s,y+s).

Los puntos medios de los segmentos AB, AC y BC pertenecen a las mediatrices respectivas, por lo que verificarán sus *ecuaciones de donde obtenemos:*

$$\left\{\begin{array}{c} \left(\frac{x+(x+t)}{2}\right)+\left(\frac{y+(y+t)}{2}\right)-2=0 \\ 3\left(\frac{x+(x+3s)}{2}\right)+\left(\frac{y+(y+s)}{2}\right)-4=0 \\ \left(\frac{(x+t)+(x+3s)}{2}\right)+2\left(\frac{(y+t)+(y+s)}{2}\right)-3=0 \end{array}\right\}$$

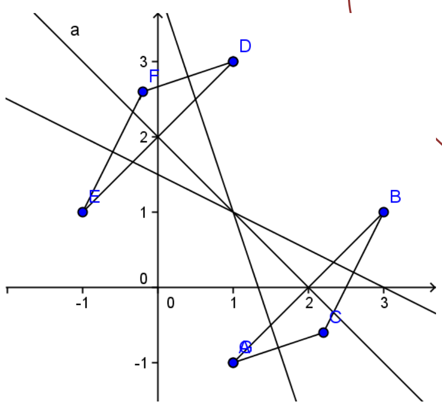
Además el punto A (y también el B y el C) pertenecen a la circunferencia de radio 2 y centro (1,1), punto donde se cortan las rectas mediatrices. Por lo que tenemos:

$(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

Resolviendo el sistema resultante de las cuatro ecuaciones, se tienen dos soluciones:

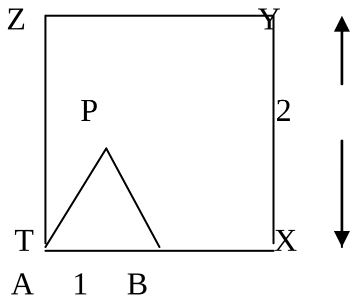
i) A(1,-1), B(3,1), C(11/5,-3/5)

ii) A’(1,3), B’(-1,1), C’(-1/5,13/5)



2.- El triángulo equilátero ABP (ver figura adjunta) de lado unidad está dentro del cuadrado TXYZ de lado 2, en una posición que llamaremos "posición inicial".

El triángulo gira en sentido horario con centro en B, luego con centro en P y así sucesivamente a lo largo de los lados del cuadrado, hasta que retorna a la "posición inicial".



a) ¿Cuál es la longitud del camino recorrido por el vértice P?
b) ¿Y si el lado del cuadrado mide cinco unidades?
c) Generalícese el resultado para cuando el lado del cuadrado sea igual a 3n + 2 veces el lado del triángulo.

SOLUCIÓN:

a) Si giramos el triángulo ABP como se indica, resulta que al dar una vuelta r, los vértices han rotado y el triángulo está en posición PAB, dando otra vuelta se encuentra en la posición BPA y en la siguiente retorna a la original ABP.
En cada vuelta se efectúan 8 giros del triángulo: 4 de 120º (cuando el centro de giro está en el centro del lado del cuadrado) y 4 de 30º (cuando el centro de giro está en uno de los vértices del cuadrado).
En la segunda vuelta el vértice P parte de la posición que tenía A inicialmente, y en la tercera vuelta el vértice P parte de la posición que tenía B al principio. Por lo si contamos los arcos girados por cada vértice en la primera vuelta y los sumamos tendremos el arco girado por P, y por consiguiente su camino recorrido (nota: como el radio de giro de los vértices que giran es uno, la longitud recorrida coincide con el ángulo medido en radianes).
Arco recorrido por P: $2\pi/3+0+2\pi/3+\pi/6+0+\pi/6+2\pi/3+0=7\pi/3$
Arco recorrido por A: $2\pi/3+\pi/6+0+\pi/6+2\pi/3+0+2\pi/3+\pi/6=5\pi/2$
Arco recorrido por B: $0+\pi/6+2\pi/3+0+2\pi/3+\pi/6+0+\pi/6=11\pi/6$
En total la longitud del camino recorrido por P es: $\boxed{20\pi/3}$ unidades de longitud.

b) Si el lado del cuadrado tiene cinco unidades cada vértice, además de los movimientos anteriores, para cada vértice y por cada lado del cuadrado se incluyen dos giros de $2\pi/3$ radianes ($4\pi/3$) y uno donde hace de centro de giro, por lo que habría que añadir estos dos giros por los cuatro lados y por las tres vueltas: $20\pi/3+4.3.4\pi/3=\boxed{68\pi/3}$.

c) Es inmediato ver que en cada lado cada vértice recorre, además de los indicados en el apartado (a): $n.2.2\pi/3=4n\pi/3$, de donde el total recorrido es:

$$20\pi/3+12.4n\pi/3=\boxed{(48n+20)\pi/3}.$$

3.- El problema de los repartos. Pascal (1623 - 1662) - Fermat (1601-1665).

Dos jugadores A y B apuestan en un cierto juego equitativo 32 € cada uno. El juego se desarrolla por partidas y gana la apuesta el primero que consiga cinco partidas.
Cuando el primero ha ganado tres partidas y el segundo dos, el juego se interrumpe: ¿Cómo hay que repartir las cantidades apostadas para ser justos?

SOLUCIÓN:
La probabilidad de que gane un jugador una partida es ½.
Indicando con A que la partida la ha ganado el jugador A, y similarmente para B; si el juego hubiese continuado hasta el final, para que ganase el juego cada jugador, a partir del momento actual, se deben dar una de estas situaciones: (nota construir un diagrama en árbol):
Gana A: AA, ABA, ABBA, BAA, BABA, BBAA
Gana B: ABBB, BABB, BBAB, BBB.

De donde: $\text{Prob(gane A)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{11}{16}$

$$\text{Prob(gane B)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

El dinero total apostado 64€ deberá repartirse proporcionalmente a la probabilidad de haber ganado el juego si hubiese continuado. Por lo que corresponden:

$\boxed{\text{Al jugador A}\rightarrow 64.11/16=44€\text{, y al jugador B}\rightarrow 64.5/16=20€.}$

4.- Representar gráficamente una función de la que se tienen los siguientes datos:

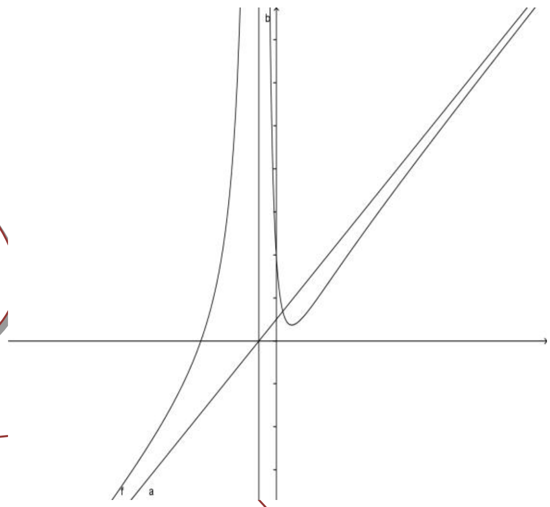
- Sea f una función definida, continua y derivable en R-{-1}
- La ecuación f (x)=0, tiene exactamente una solución negativa.
- La ecuación f '(x) = 0; también tiene una única solución (simple) positiva.
- Se verifica que: f (0) = 4 y f (1)= 3/4.
- La recta y = x + 1 es una asíntota oblicua.
- $\lim_{x \to -1^{\pm}} f(x) = +\infty$

a) Hacer la representación gráfica de la función sabiendo que es una función racional.
b) Obtener la expresión analítica de la función.

SOLUCIÓN:

A) Gráfica:

Representamos primero las asíntotas:
Vertical: x=-1. Oblicua y=x+1,
y tenemos en cuenta: la tendencia de la ramas en las proximidades de la asíntota vertical; que solo hay una raíz (negativa) y un solo punto extremo de abscisa positiva y que se trata de una función racional (solo puede tener discontinuidades evitables o asintóticas, y solo puede tener una asíntota horizontal u oblicua bilátera $x \to \pm\infty$)



B) Expresión analítica:

i) La función posee en el punto de abscisa x=-1 una asíntota vertical (a y f).

ii) Como la función es racional su denominador debe ser un múltiplo de (x+1), y por la sexta condición, al tender a $+\infty$ tanto por la derecha como por la izquierda de -1, entonces debe ser de una potencia de exponente par de (x+1), la más pequeña es $(x+1)^2$.

iii) Como la función es racional y tiene una asíntota oblicua, el numerador debe ser de un grado mayor que el denominador y el cociente es la ecuación de esta asíntota; podemos escribir que $f(x) = x + 1 + \frac{ax+b}{(x+1)^2}$

iv) Como f(0)=1+b=4 $\Rightarrow$ b=3.

v) Como f(1)= 2+ (a+3)/4=3/4 $\Rightarrow$ a=-8

vi) Luego $f(x) = x + 1 + \frac{-8x+3}{(x+1)^2} = \frac{x^3+3x^2-5x+4}{(x+1)^2}$.

vii) Comprobemos las dos condiciones que faltan:
El polinomio $p(x) = x^3+3x^2-5x+4$, tiene una raíz negativa, ya que p(0)=4>0 y

p(-10)<0 (por ejemplo). (teorema de Bolzano).

Si tuviese mas raíces reales su derivada deberá anularse al menos en dos puntos y en estos la función tomar valores de signo distinto o bien uno de ellos ser valor nulo (se trata de una cúbica cuyo coeficiente director es positivo) .

$p'(x)=3x^2+6x-5=0$; $x_1=-1-\frac{2\sqrt{6}}{3}$; $x_2=-1+\frac{2\sqrt{6}}{3}$;

sustituyendo el valor máximo relativo de p(x) es $p(x_1)>0$ y el mínimo relativo es $p(x_2)>0$, luego solo tiene una raíz negativa.

La función derivada es: $f'(x)=\frac{x^3+3x^2+11x-13}{(x+1)^3}$, procediendo del mismo número con el numerador $q(x)=x^3+3x^2+11x-13$, $q(0)=-13<0$, $q(1)=2>0$ $\Rightarrow$ existe una raíz positiva comprendida entre 0 y 1. Y $q'(x)=3x^2+6x+11$ y esta no tiene raíces reales luego la función f(x) solo se anula una sola vez $\Rightarrow$ tiene un único extremo relativo .

5.- Sean R y Q las proyecciones ortogonales de un punto P del plano sobre dos rectas fijas e_1, e_2 que forman un ángulo α

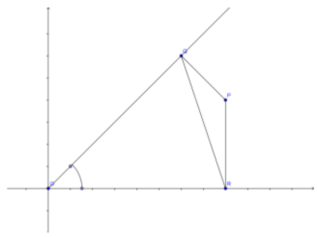
a) Determinar las ecuaciones del lugar geométrico que describe P si el segmento RQ es de longitud constante.

b) Referir las ecuaciones del lugar a la referencia oblicua que definen las rectas e_1, e_2.

c) Particularizar para el caso en el que α =π/2 .

SOLUCIÓN:

Apartado a). Tomemos el origen de coordenadas coincidente con el punto de intersección de las rectas y el eje de abscisas con la recta e_1.



La recta e_2 tiene de ecuación Y=mX, siendo m=tgα.

Sea P(x,y) un punto general del plano, sus proyección sobre e_1 es R(x,0) y su proyección sobre e_2, Q, viene dada por la intersección del la recta e_2 y la perpendicular trazada desde P a e_2: $Q\begin{Bmatrix} Y = tg\alpha . X \\ Y - y = -cotg\alpha(X - x) \end{Bmatrix}$ resolviendo:

$$Q(\cos\alpha(x\cos\alpha, y\,sen\alpha),\ sen\alpha(x\cos\alpha, y\,sen\alpha)).$$

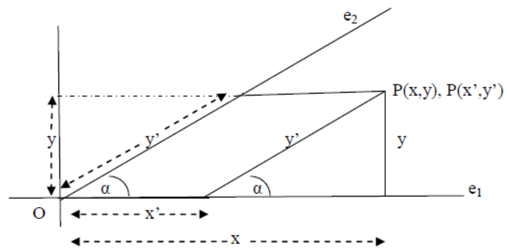
Llamando a la distancia fija $k = \overline{RQ}$ se tiene que la ecuación del lugar es:

$$(cos\alpha(xcos\alpha + ysen\alpha) - x)^2 - (sen \propto (xcos\alpha + ysen\alpha)\ )^2 = k^2$$

Simplificando: $\boxed{x^2 + y^2 = \left(\frac{k}{sen\alpha}\right)^2}$ Que es una circunferencia de centro el punto de intersección de la rectas e_1 y e_2 y radio: k/senα.

Apartado b)

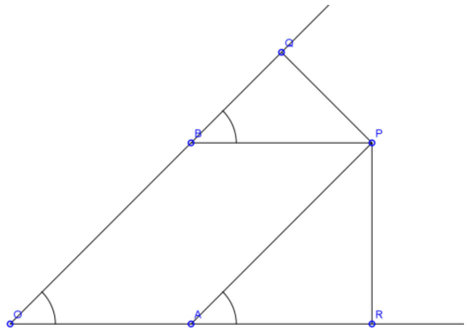
Superponiendo la referencia oblicua dada por las rectas e_1, e_2, el sistema de referencia ortonormal anterior, se tiene que las coordenadas en uno y otro sistema están relacionadas por: $x = x' + y'cos\alpha$, y=y'senα. Sustituyendo en la ecuación anterior se tiene:



$$(x' + y'cos\alpha\ )^2 + (ysen\alpha)^2 = \left(\frac{d}{sen\alpha}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x'^2 + 2x'y'cos\alpha + y'^2 = \left(\frac{d}{sen\alpha}\right)^2}$$

Apartado c) Si α=π/2, de (a) o de (b) la ecuación es: $\boxed{x^2 + y^2 = k^2}$

Apartado b) de otra manera:



Si ahora el sistema de referencia es el que definen las rectas e_1, e_2; Siendo P(x,y) se tiene que: A(x,0), B(0,y),

$\overline{AR} = ycos\alpha,\ \overline{BQ} = xcos\alpha \Rightarrow$

$\overline{OR} = x + ycos\alpha,\ \overline{OQ} = y + xcos\alpha.$

Y por el teorema del coseno en el triángulo OPQ:

$\overline{RQ}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\overline{OR}.\overline{OQ}.cos\alpha$

De donde:

$$k^2 = (x + ycos\alpha)^2 + (y + xcos\alpha)^2 - 2(x + ycos\alpha)(y + xcos\alpha)cos\alpha$$

Desarrollando y simplificando: $\boxed{x^2 + y^2 + 2xycos\alpha = \left(\frac{k}{sen\alpha}\right)^2}$